



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Eigenschaften linearer Abbildungen)

- (i) Seien U, V und W K -Vektorräume. Seien $f : V \rightarrow W$ und $g : U \rightarrow V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Funktionsverkettung $f \circ g : U \rightarrow W$ auch eine lineare Abbildung ist.
- (ii) Seien V, W K -Vektorräume und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Kern } f = \{0\}$$

Lösung 1

- (i) Seien $u, u_1, u_2 \in U, \lambda \in K$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u_1 + u_2) &= f(g(u_1 + u_2)) \\ &= f(g(u_1) + g(u_2)) \\ &= f(g(u_1)) + f(g(u_2)) \\ &= (f \circ g)(u_1) + (f \circ g)(u_2) \\ \lambda((f \circ g)(u)) &= \lambda(f(g(u))) \\ &= (\lambda f)(g(u)) \\ &= f(\lambda(g(u))) \\ &= f((\lambda g)(u)) \\ &= f(g(\lambda u)) \\ &= (f \circ g)(\lambda u)\end{aligned}$$

- (ii) Es ist klar dass die Bedingung hinreichend ist. Für die Notwendigkeit, nehmen wir an, dass $\text{Kern}(f) = \{0\}$, und seien $u, v \in V$ mit $f(u) = f(v)$. Dann ist

$$0 = f(u) - f(v) = f(u - v),$$

da f linear ist. Mit anderen Worten, $u - v \in \text{Kern}(f)$, also $u - v = 0 \iff u = v$.

Aufgabe 2 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht linear? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$
- (ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5$
- (iii) $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$
- (iv) $\Phi : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$

Lösung 2

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$ ist linear, denn $\forall u := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v := (x', y') \in \mathbb{R}^2$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(x, y) + (x', y')) = f((\lambda x, \lambda y) + (x', y')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), \lambda x + x') = (3\lambda x + 3x' + 2\lambda y + 2y', \lambda x + x') \\ &= ((3\lambda x + 2\lambda y) + (3x' + 2y'), \lambda x + x') = (3\lambda x + 2\lambda y, \lambda x) + (3x' + 2y', x') \\ &= \lambda(3x + 2y, x) + (3x' + 2y', x') = \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

- (ii) g ist nicht linear, denn

$$g(0) + g(1) = 5 + 7 = 12 \neq 7 = g(1) = g(0 + 1).$$

- (iii) h ist nicht linear, denn:

$$h(i \cdot 1) = h(i) = -i \neq i \cdot h(1) = i \cdot 1 = i$$

(wenn $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum gesehen wird, ist h aber linear).

- (iv) Φ ist linear: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\Phi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \Phi(f) + \Phi(g)$
2. $\Phi(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot \Phi(f)$.

Aufgabe 3 (Untervektorräume)

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

- (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$
- (iii) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
- (iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R}^3$
- (v) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Lösung 3

- (i) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$:

1. Seien $(x, y, z), (x', y', z') \in U_1$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in U_1 \wedge (x', y', z') \in U_1 \\ \iff 3x + 2y + z = 0 \wedge 3x' + 2y' + z' = 0 \\ \implies 3x + 2y + z + 3x' + 2y' + z' = 0 \\ \iff 3(x + x') + 2(y + y') + (z + z') = 0 \end{aligned}$$

also liegt $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ in U_1 .

2. Sei $(x, y, z) \in U_1, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0 \\ \implies \lambda(3x + 2y + z) &= 3(\lambda x) + 2(\lambda y) + \lambda z = 0 \\ \implies \lambda(x, y, z) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U_1. \end{aligned}$$

- (ii) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 1\}$ ist kein Untervektorraum, da $(0, 0, 0) \notin U_2$.
- (iii) $U_3 = \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum, da $(0, 1) \in U_3$ aber $(-1) \cdot (0, 1) = (0, -1) \notin U_3$.
- (iv) $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y\}$ ist kein Untervektorraum, da $(0, 1, 0) \in U_4$ aber $(-1) \cdot (0, 1, 0) = (0, -1, 0) \notin U_4$.
- (v) $U_5 = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x) \Rightarrow f + g \in U$, und
 - $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x) \Rightarrow \lambda f \in U$.

Aufgabe 4 (Graphen)

Gegeben seien Funktionen f, g, h und k von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

- (i) $f(x_1, x_2) = 1$
- (ii) $g(x_1, x_2) = x_1 + 2$
- (iii) $h(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 + 2$
- (iv) $k(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$

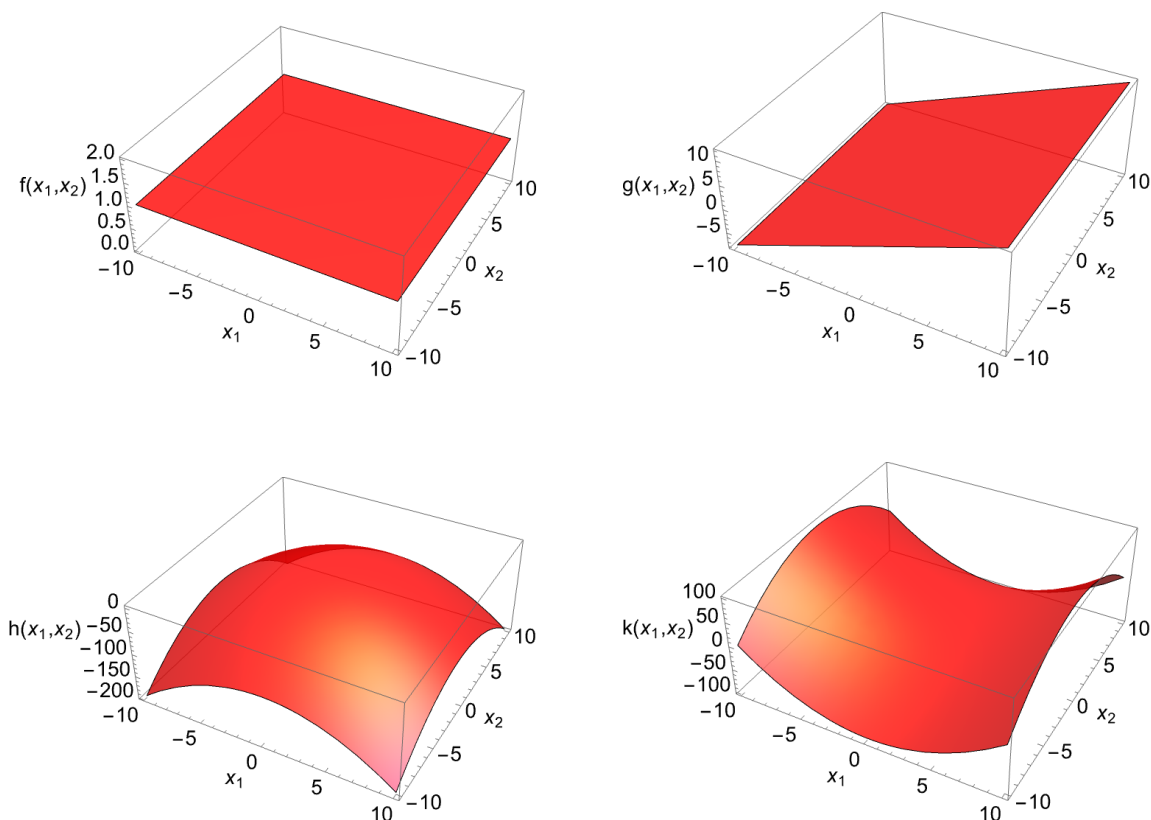
Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion, d.h. zeichnen Sie G_f, G_g, G_h und G_k . Ist eine der skizzierten Flächen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sei $f : X \rightarrow Y$. Der Graph einer Funktion f ist definiert als

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

D.h. für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ ist $G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

Lösung 4



(Idee für die Skizzen: Wie sehen die Kurven $(a, x_2, f(a, x_2))$ und $(x_1, b, f(x_1, b))$ aus für feste a und b ?)

Um ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ zu sein, muss eine Menge $(0, 0, 0)$ enthalten; dies schließt G_f, G_g und G_h schonmal aus. G_k ist auch kein Untervektorraum, denn $(1, 1, 0) \in G_k, (1, -1, 0) \in G_k$, aber $(1, 0, 0) \notin G_k$; man sieht dies auch intuitiv an der Krümmung der Fläche.